

矢通量分裂显式格式及二元喷管射流模拟

北京航空 航天大学 单 鹏

【摘要】 本文在较常用的显式两步格式的基础上，采用 Steger-Warming 形式的矢通量分裂（简称矢分或 FVS）的原理，提出了一种矢分二阶精度显式两步格式。在分析了格式的各种特性后，与 MacCormack 格式进行了实算对比。又给出了某二元喷管射流问题的模拟实例。计算结果表明，矢分与该显式格式的配合具有矢分法的基本优点和计算稳定、速度较快的优点。

一、矢通量分裂后的 N-S 方程组

用时间推进法求解守恒形原参数二维气动全 N-S 方程组，经施行参量平均化，无量纲化，向计算平面转换，得到矢通量形式的 N-S 方程组^[1]

U + Fξ + Gη = (Rξ + Sη)/Re (1.1)

在计算平面上应用 Steger-Warming 的分裂原理，首先对 (1. 1) 中 F, G 进行分裂。可写成：

Uτ + A Uξ + B Uη = (Rξ + Sη)/Re (1.2)

即 F(U), G(U) 是向量 U 的一阶齐次函数。矩阵 A = ∂F/∂U, B = ∂G/∂U，一般为非奇异阵^[1]其特征值阵为

Λ(A) = diag[U, U, U + aL(ξ), U - aL(ξ)]
Λ(B) = diag[V, V, V + aL(η), V - aL(η)] (1.3)

其中 L(ξ) = ξx² + ξy², L(η) = ηx² + ηy², a 为物理平面上音速。对矢通量 F, 按特征值阵 Λ(A) 中的正与负特征值，分裂为亚正矢通量 F+ 与亚负矢通量 F- 之和，同样据 Λ(B) 处理 G 得：

F = F+ + F- , G = G+ + G- (1.4)

而亚矢通量的计算式可整理为极简洁的形式

F± = Lρ/2Y [C1 C1u + C2aζ C1v + C2aζ C1(u² + v²)/2 + C2aζu + C2aζv + C3a²/(Y-1)] (1.5)

G± = {F± | ζ 换为 η} (1.6)

其中 C1 = 2(Y-1)λ1 + λ2 + λ3, C2 = λ3 - λ4, C3 = λ3 + λ4 (1.7)
计算 F± 时 λ1, ..., λ4 用 Λ(A) 中某特征值或取 0，由流场某点的几何参数和物理原参数 u、v、a 以及计算平面上的超、亚音状态来确定。相应算 G± 时用 Λ(B) 中某值或取 0。ξx 等为空间 j, k 点上的常量

$$\xi_x = \xi_x/L(\xi), \xi_y = \xi_y/L(\xi), \eta_k = \eta_k/L(\eta), \eta_l = \eta_l/L(\eta) \quad (1.8)$$

按 (1.6 ~ 1.8) 估计, 计算一次 $\hat{F}^+$, 仅需 21 次乘法, $\hat{F}^+$, $\hat{F}^-$ 共需不超过 3.5 倍于 $\hat{F}$ 的计算量。

(1.1) 右端粘性矢量通量 $\hat{R}$ 、 $\hat{S}$ 中主要包含参数变量函数 u , v , T 的空间一阶导数。首先, 对应于 $\hat{R}$, $\hat{S}$ 项的 N-S 方程组解的依赖区域, 其方位是不随速度而变的。因此, 不必按速度是否超音取差分方向; 其次, $\hat{R}_\xi$, $\hat{S}_\eta$ 中的一阶导数项 ρ_ξ , u_ξ , v_ξ , T_ξ 等仅带给某点的解上游影响, 二阶导数项 $\rho_{\xi\xi}$ 等带来上、下游两方向的影响^[2]。因此, $\hat{R}_\xi$, $\hat{S}_\eta$ 应取两侧差分, 而不必分裂成亚矢量通量。采用一阶前差, 二阶后差的两阶中心差分来求 $\hat{R}_\xi$, $\hat{S}_\eta$ 对于每时间步 n , $n+1$ 的值。

最终求解的矢分二维全 N-S 方程组为

$$\bar{U}\tau + \hat{F}_\xi^+ + \hat{F}_\xi^- + \hat{G}_\eta^+ + \hat{G}_\eta^- = (\hat{R}_\xi + \hat{S}_\eta)/Re \quad (1.9)$$

求解时以 ρ , u , v , e , a 为参变量函数。 $\hat{F}^+$, $\hat{G}^+$ 后差, $\hat{F}^-$, $\hat{G}^-$ 前差。

二、二阶精度显式格式

对格式问题, 现以物理平面上的 Euler 方程组及其标量模型方程

$$\bar{U}_t + F_x = 0 \quad (2.1)$$

$$u_t + \lambda u_x = 0 \quad (\lambda = \text{const}) \quad (2.2)$$

和矢量通量分裂后的方程

$$\bar{U}_t + F_x^+ + F_x^- = 0 \quad (2.3)$$

$$u_t + \lambda^+ u_x = 0 \quad (\text{or } u_t + \lambda^- u_x = 0; \text{const } \lambda^+ > 0, \lambda^- < 0) \quad (2.4)$$

为例来讨论

分裂后的双曲型方程 (2.4), 若利用 MacCormack 格式的优点而简单套用该格式, 并考虑亚矢量通量仅向某单侧差分的规则, 得

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{t} + \frac{\lambda^+}{2} \left[\frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{h} + \frac{\tilde{V}_j^{n+1} - \tilde{V}_{j-1}^{n+1}}{h} \right] = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\tilde{V}_p^{n+1} - \tilde{V}_p^n}{t} + \lambda^+ \left[\frac{V_p^n - V_{p-1}^n}{h} \right] = 0 \quad (p = j, j-1) \quad (2.6)$$

此格式对于 MacCormack 格式的变动在于“予”、“校”二步均向空间同侧差分, 由于破坏了空间对称性, 格式的改型方程为

$$(U_t)_j^n + \lambda^+ (U_x)_j^n + \left[-\frac{\lambda^+ h}{2} \right] (U_{xx})_j^n + \left[\frac{\lambda^+ h^2}{6} + \frac{(\lambda^+)^2 th}{2} \right] (U_{xxx})_j^n + O(h^3, t^2) = 0 \quad (2.7)$$

逼近精度仅为一阶 $O(h, th)$ 了。计算实践表明这种格式精度低, 粘性过大, 使中、弱强度激波系趋于完全抹平。由于达不到二阶精度, 两步算法也失去意义。显然不能简单套用原 MacCormack 格式解分裂后的 Euler 方程。

本文对分裂后的双曲型方程 (2.4), 提出了新的差分格式。对“予”、“校”二步均采用空间一侧三点一阶差分, 格式为

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{t} + \frac{\lambda^+}{2} \left[\frac{3V_j^n - 4V_{j-1}^n + V_{j-2}^n}{2h} + \frac{3\tilde{V}_j^{n+1} - 4\tilde{V}_{j-1}^{n+1} + \tilde{V}_{j-2}^{n+1}}{2h} \right] = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\tilde{V}_p^{n+1} - \tilde{V}_p^n}{t} + \lambda^+ \left[\frac{3V_p^n - 4V_{p-1}^n + V_{p-2}^n}{2h} \right] = 0 \quad (p = j, j-1, j-2) \quad (2.9)$$

其改型方程为

$$(U_t)_j^n + \lambda^+ (U_x)_j^n + (-\lambda^+ h^2/3)(U_{xx})_j^n + O(t^2) + O(th^2) + O(h^3) = 0 \quad (2.10)$$

逼近精度又为二阶 $O(h^2, t^2)$ 。计算实践表明此格式用于解矢分 Euler 方程达到足够精度, 并由于四阶导数耗散项

$$O(th^2) = [(\lambda^+)^2 th^2/3](U_{xxx})_j^n \quad (2.11)$$

的存在而较 MacClormack 格式解分裂前的 Euler 方程更为稳定。

解矢分后的 N-S 方程组 (1. 10) 的最终格式为

$$\begin{aligned} \hat{U}_{j,k}^{n+1} &= \hat{U}_{j,k}^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left[\frac{1}{2} \nabla_{3\xi} \hat{F}_{j,k}^{+n} + \frac{1}{2} \Delta_{3\xi} \hat{F}_{j,k}^{-n} - \frac{1}{Re} \nabla_{\xi} \hat{R}_{j,k}^n \right] - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta} \left[\frac{1}{2} \nabla_{3\eta} \hat{G}_{j,k}^{+n} + \frac{1}{2} \Delta_{3\eta} \hat{G}_{j,k}^{-n} - \frac{1}{Re} \nabla_{\eta} \hat{S}_{j,k}^n \right] \\ \hat{U}_{j,k}^{n+1} &= \left[\hat{U}_{j,k}^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left[\frac{1}{2} \nabla_{3\xi} \hat{F}_{j,k}^{+n+1} + \frac{1}{2} \Delta_{3\xi} \hat{F}_{j,k}^{-n+1} - \frac{1}{Re} \nabla_{\xi} \hat{R}_{j,k}^{n+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{U}_{j,k}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta} \left[\frac{1}{2} \nabla_{3\eta} \hat{G}_{j,k}^{+n+1} + \frac{1}{2} \Delta_{3\eta} \hat{G}_{j,k}^{-n+1} - \frac{1}{Re} \nabla_{\eta} \hat{S}_{j,k}^{n+1} \right] \right] \Big/ 2 \quad (2.12) \end{aligned}$$

其中 $\overline{n+1}$, $n+1$ 各代表予测步、校正步结果, $\nabla_{3\xi}$ 代表后三点一阶差分。采用当地时间步, 步长由下式确定 (M 、 P_R 各代表紊流涡粘性和紊流普朗特数, C 为克朗数)

$$\Delta\tau = C \cdot \min(\Delta\tau_{\xi}, \Delta\tau_{\eta}) \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \Delta\tau_{\xi} = \Delta\xi / \left[\bar{U} + a \sqrt{\bar{\xi}_x^2 + \bar{\xi}_y^2} + (2\gamma/\Delta\xi) \cdot M/P_R + \sqrt{2/3} \cdot M/\Delta\eta \right] / (\rho Re) \\ \Delta\tau_{\eta} = \Delta\eta / \left[\bar{V} + a \sqrt{\bar{\eta}_x^2 + \bar{\eta}_y^2} + (2\gamma/\Delta\eta) \cdot M/P_R + \sqrt{2/3} \cdot M/\Delta\xi \right] / (\rho Re) \end{cases} \quad (2.14)$$

三、格式的稳定性与数值粘性

两步格式 (2.8)、(2.9) 实质为三层格式。对模型方程 (2.4) 其放大矩阵为^[3]

$$G(t, k) = \begin{bmatrix} K & 1+K \\ 0 & 1+2K \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

其中 $K = C/4 \cdot (1 - e^{-ikh})(e^{-ikh} - 3)$ (k 为波数), $C = \lambda^+ t/h = \text{courant}$

显然 G 的特征值为 $\lambda_1 = K$, $\lambda_2 = 1+2K$ 。稳定性条件为 $|\lambda_1| \leq 1$ 及 $|\lambda_2| \leq 1$ 。两不等式均得出 $C \leq 1/2$ 为稳定条件。

又按文献 [1] 中的方法, 对格式 (2.8)、(2.9) 用于解矢分 Euler 方程时的固有粘性做了估计。以物理平面上一维 Euler 方程 (2.3) 为例, 格式相应为

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - (\Delta t/2\Delta x)(\nabla_{3x} \bar{F}_j^{+n} + \Delta_{3x} \bar{F}_j^{-n}) \quad (3.2)$$

$$\bar{U}_j^{n+1} = \left[\bar{U}_j^n - (\Delta t/2\Delta x)(\nabla_{3x} \bar{F}_j^{+n+1} + \Delta_{3x} \bar{F}_j^{-n+1}) + \bar{U}_j^{n+1} \right] \Big/ 2 \quad (3.3)$$

令 $F^+ = (F + |F|)/2$, $F^- = (F - |F|)/2$, $|F| = P_A |\Lambda_A| P_A^{-1} U$

则 (3.2)、(3.3) 可变形为

$$\frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + \frac{D\bar{F}_j^n}{DX} = \frac{(\Delta X)^2 D^3 \bar{F}_j^n}{2DX^3} - \frac{(\Delta X)^3 D^4 |F|_j^n}{4DX^4} \quad (3.4)$$

$$\frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{D\bar{F}_j^n}{DX} + \frac{D\bar{F}_j^{n+1}}{DX} \right] = \frac{(\Delta X)^2}{2} \left[\frac{D^3 \bar{F}_j^n}{DX^3} + \frac{D^3 \bar{F}_j^{n+1}}{DX^3} \right] \Big/ 2 - \frac{(\Delta X)^3}{4} \left[\frac{D^4 |F|_j^n}{DX^4} + \frac{D^4 |F|_j^{n+1}}{DX^4} \right] \Big/ 2 \quad (3.5)$$

其中符号意义是

$$\frac{D\bar{F}_j^n}{DX} = \frac{\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n}{2\Delta X} \quad (3.6)$$

$$\frac{D^3 \bar{F}_j^n}{DX^3} = \left[\frac{\bar{F}_{j+2}^n - \bar{F}_j^n}{2\Delta X} - 2 \frac{\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n}{2\Delta X} + \frac{\bar{F}_j^n - \bar{F}_{j-2}^n}{2\Delta X} \right] \Big/ (\Delta X)^2 \quad (3.7)$$

$$\frac{D^4 |F|_j^n}{DX^4} = \frac{|F|_{j-2}^n - 4|F|_{j-1}^n + 6|F|_j^n - 4|F|_{j+1}^n + |F|_{j+2}^n}{(\Delta X)^4} \quad (3.8)$$

以上 P_A 、 $|\Lambda_A|$ 各为矩阵 $A = \partial F / \partial U$ 的特征向量阵和对各元素取绝对值的 A 的特征值阵。若认为 F 与 U 近似为线性关系, 则 (3.4)、(3.5) 左端即是对 (2.3) 的未分裂形式写出的差分方程, 而右端即为对格式所添加的频数和耗散性项的估计。“予”、“校”两步均有三阶导数的频散项和四阶导数的耗散项。耗散项是格式固有的数值粘性项。

四、与 MacCormack 1972 年格式 (MC72) 对比

MC72^[4] 是一种二阶精度两步加时间分裂的多维问题格式。对于图 1 所示二维小角度对称双尖劈在 $Ma = 2.0$ 的空气流中的激波—膨胀波体系, 分别用矢分法对 (1.10) 式和 MC72 法对 (1.1) 式进行了 Euler 求解。这是一个波后前压比 P_2/P_1 仅 1.28 的较弱激波流场, 以尖劈长为参考长度的来流雷诺数为 2.2×10^4 , 静压为 1.0 大气压。劈前为自由流, 劈后为尾迹流。为初试对射流问题的适用性, 于劈前上方加一直边钝底唇口, 底部仅一条网线穿过。网格 33×33 。图 2、图 3 为等压线, 图 4、图 5 为底边 $k = 1$, 横剖 $j = 23$ 处的马赫数和静压分布。由两法及各解与解析解的对比有:

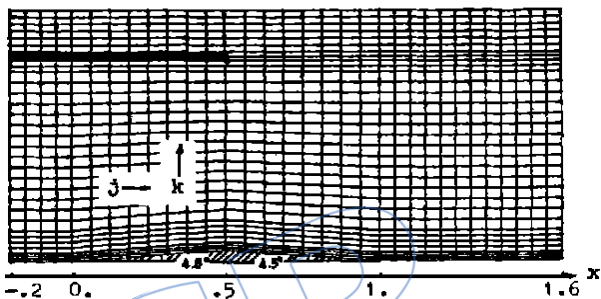


图 1 对称双尖劈

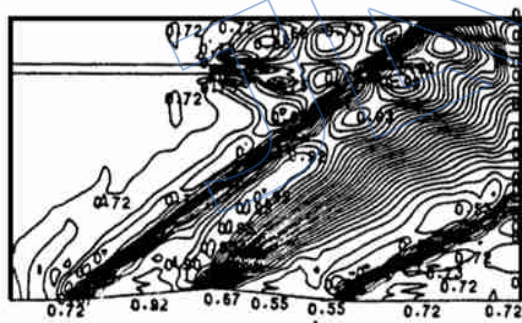


图 2 MC72 法解的等压线

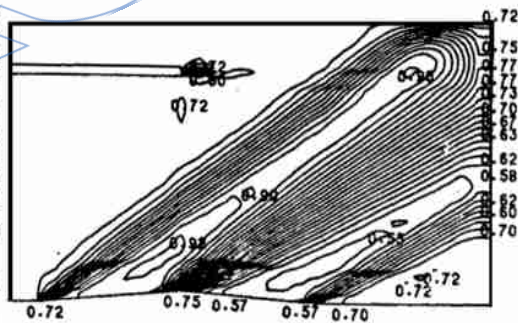


图 3 FVS 法解的等压线

1. MC72 法于激波前产生较大数值振荡, 使波前 Ma 数不易确定; 而 FVS 法不存此问题 (见 Ma 分布图)。这一优点是出于差分计算中正确地获得了上一时刻有关网点上的物理信息。

2. FVS 法不加入人工粘性也收敛, 且收敛过程稳定。这是由于该法本身有较强的粘性机制所致。对于弱波, 这使抹平宽度有所增加, 而对于强波, 将使计算易于收敛。

3. 同样由于粘性较强, 就细小波系结构的清晰度而言, 本文的 FVS 法不如 MC72 法总体精度高。但从图 4、图 5 看, 该法非波位置上压力数值解对解析解的偏差均 $< 2\%$; 激波抹平宽度不超过四网格; 说明精度问题仍满足通常使用要求。等压线还示出该法消除了格式数值振荡带来的不合理的压力峰、谷等扰动现象。

4. 总机时两法几乎相等。计算过程的其它参数见表 1。显然, 就精度、每步每点机时、总

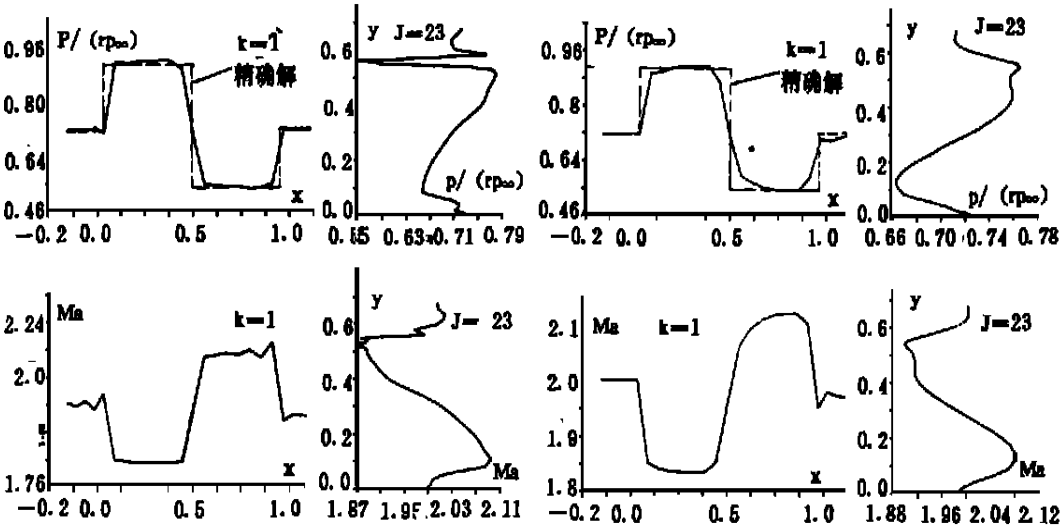


图 4 MC72 法的静压和 Ma 分布

图 5 FVS 法的静压和 Ma 分布

机时、对流场的适应性等，本文的 FVS 法具有快速、振荡小的优点。

表 1

方法	机 型	点最大 残差终值	克朗数	时间 步数	总 CPU (s)	每步每点 CPU (s)	每步差分方 程调用次数
FVS	ELXSI6400	0.0000976	0.30	408	290.5	6.45×10^{-4}	2
MC72	单精度运算	0.0001266	0.40	238	268.5	10.36×10^{-4}	约 3

五、某设想的航天飞机的跨音射流

图 6 描述了做中空跨音飞行的某航天飞机冲压发动机的二元非对称喷管的二维射流问题

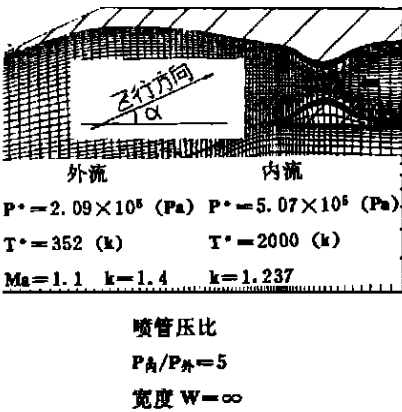


图 6 物理参数和网格

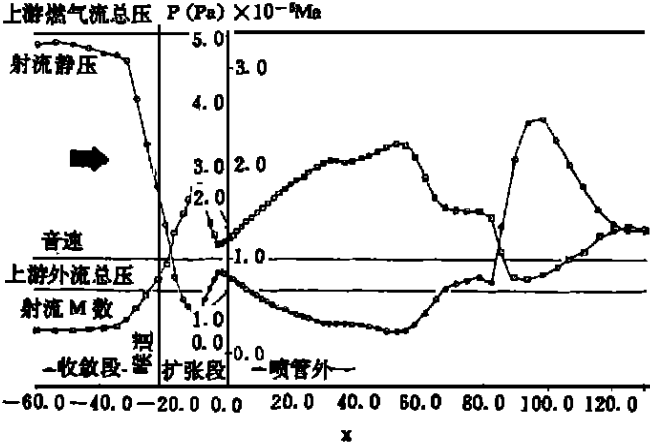
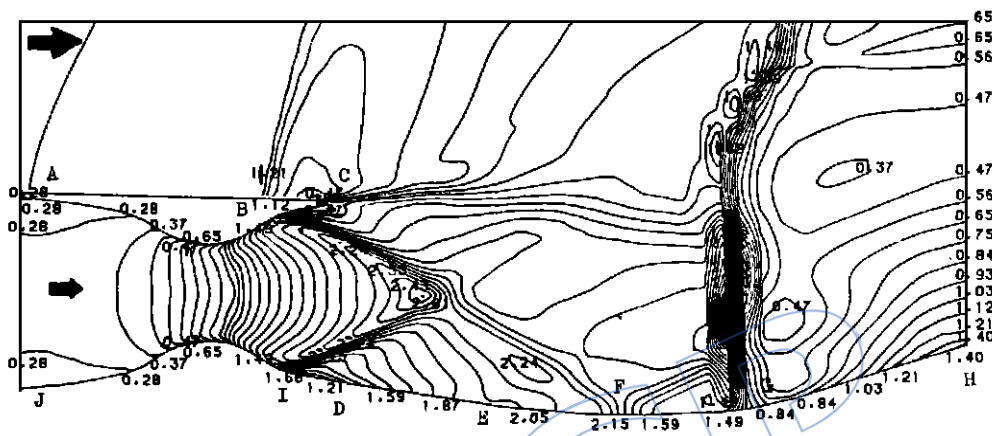


图 7 静压和 Ma 分布

题及其网格。喷管位于机身后下方, 其轴线与飞行方向成 α 角。扩张比 $A_{\text{出口}}/A_{\text{喉道}} = 1.8$ 。使工况为过膨胀, 压比为 5。为获得流场的定性特征, 仍采用 *Euler* 方程组求解。管内 23×37 网点, 管外流向 46 点, 总体 69×53 点。此例为激波较强的流场, 其中存在 $P_2/P_1 > 4$ 的正波。在 *IBM 4381* 机上用单精度计算, *MC72* 法几乎不能收敛。用 *FVS* 法 460 步, 点最大残差下降两个半量级。克朗数取 0.25。每步每点 *CPU* 约 13.6×10^{-4} 秒。图 7 为较长壁上静压、马赫数分布, 图 8 等压线。可见:



A FLUX VECTOR SPLITTING EXPLICIT SCHEME AND SIMULATION OF 2-D NOZZLE & PROPULSIVE JET

Shan Peng

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

On the basis of two steps explicit methods, author investigates the application of the theory of Flux Vector Splitting (FVS) of J. L. Steger and R. F. Warming. Besides the simplified split flux vector formula, a new explicit scheme is proposed for solving hyperbolic differential equation. It is a explicit two steps FVS scheme of second order accuracy. At first it was compared with MacCormack's scheme issued in 1972 (MC72) in numerical computation. And finally a 2-D flow of a rectangular nozzle with its jet plume was analysed numerically by the present scheme. The results indicate some high performances of the present scheme: 1. Numerical vibrations near the front surface of shock waves vanish. 2. The scheme runs without artificial viscosity. 3. It takes just as much time as MC72 takes to solve a flow field. The scheme features the higher inherent viscosity of the scheme compared with that of MC72.

AN ANALYTICAL STUDY OF COMPONENT MATCHING REGULARITY OF TURBOJET ENGINE

Liu Daozhi

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

Many off-design condition phenomena of a turbojet engine are related with the variation of incidence angles at front and rear compressor stages. Based on the component matching regularity, the simple and clear analytical equations of the variation of incidence angles at front and rear compressor stages under engine operating conditions have been derived. With these analytical equations, a series of the off-design condition phenomena in a low or high design pressure ratio engines or in an , axial, centrifugal or combined axial-centrifugal engines, all well as in a two-spool engines are analyzed systematically, their physical natures are clarified, and various off-design condition problems which may occur can be predicted in advance.

A REVIEW AND PROSPECT OF PULSATING COMBUSTION

Cao Chuanjun, Xu Dengfeng, Zhu Changhain, Ren Yue

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

It's well known that pulsating combustion has the advantages in fuel saving, pollutant suppression, enhancement of combustion intensity and efficiency and increase of convective heat and mass transfer rates. The capital investment and operational costs of many systems and processes can be reduced if the pulsating combustion be applied. In this paper, the characteristics of the pulsating combustion are treated and a review with instructive comments on its application is given. The application of the pulsating combustion particularly in the areas of jet propulsion, gas turbine, boiler and heater, drying and ash cleaning is discussed. In the end, its prospects are also remarked.